26-11-18

$f : A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$

Λέμε ότι η f έχει ως ασύμπτωτη την ευθεία $y = ax + \beta$ αν $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax+\beta)) = 0$ κ' έχει ως ασύμπτωτη την ευθεία $x = \xi$ αν $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \in A'$ όταν κάποιο από τα πλευρικά όρια της f στο ξ είναι $\pm\infty$

<u>Άσκηση</u>

Να βρεθούν τα $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+4x+5} - ax - \beta) = 0$

$$\sqrt{x^2+4x+5} - ax - \beta = \frac{x^2+4x+5-(ax+\beta)^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+ax+\beta} =$$

$$\frac{x^2+4x+5-a^2x^2-2a\beta x-\beta^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+ax+\beta} = \frac{x^2(1-a^2)+x(4-2a\beta)+5-\beta^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+ax+\beta}$$

Αν $(1-a^2)\neq 0 \Rightarrow \dfrac{x^2(1-a^2)+(4-2a\beta)x+5-\beta^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+ax+\beta} =$

$\dfrac{(1-a^2)+\frac{4-2a\beta}{x}+\frac{5-\beta^2}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x^4}}+\frac{a}{x}+\frac{\beta}{x^2}}$ μη φραγμένη όταν $x\to\infty$

$\Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}-(ax+\beta)=\dfrac{(4-2a\beta)x+5-\beta^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+ax+\beta} =$

$\dfrac{4-2a\beta+\frac{5-\beta^2}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+a+\frac{\beta}{x}}$

Έστω ότι $a=-1 \Rightarrow 4-2a\beta=0 \Rightarrow 4+2\beta=0 \Rightarrow \beta=-2$

↳ αλλιώς η συν/ση δεν είναι φραγμένη όταν $x\to\infty$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+4x+5}-(ax+\beta)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}-x-2}$ μη φραγμένη

$\sqrt{x^2+4x+5}-x-2=\dfrac{x^2+4x+5-(x^2+4x+4)}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2} \xrightarrow{x\to\infty} 0$

Έστω ότι $a=1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{(4-2\beta)x+5-\beta^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+\beta}=\dfrac{4-2\beta+\frac{5-\beta^2}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1+\frac{\beta}{x}}$

$\xrightarrow{x\to\infty} \dfrac{4-2\beta}{2} \Rightarrow \beta=2$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log x}{x-1}=1$

$e^x \geq x+1 \quad \forall x\in\mathbb{R} \overset{x=\log y}{\Longrightarrow}$

$e^{\log y}\geq \log y+1 \Rightarrow \log y \leq y-1 \quad \forall y\in(0,+\infty)$

$\overset{y=1/z}{\Longrightarrow} \log\frac{1}{z}\leq\frac{1}{z}-1 \Rightarrow -\log z\leq\frac{1}{z}-1$

$\Rightarrow \log z \geq 1-\frac{1}{z} \quad \forall z\in(0,+\infty)$

$$\frac{1}{x} = \frac{1-\frac{1}{x}}{x-1} \leq \frac{\log x}{x-1} \leq \frac{x-1}{x-1} = 1 \quad , x \geq 1$$

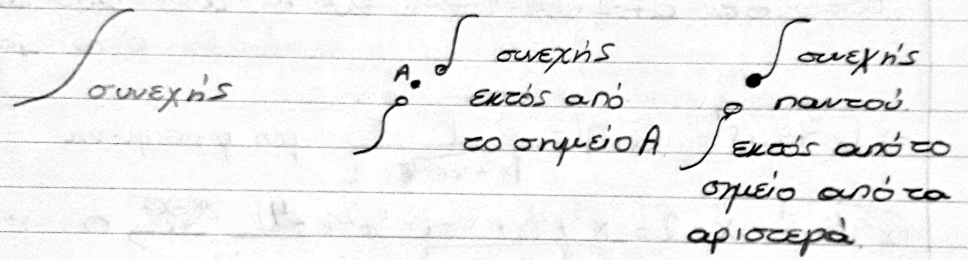
$$1 \leq \frac{\log x}{x-1} \leq \frac{1-\frac{1}{x}}{x-1} = \frac{1}{x} \quad , 0 < x \leq 1$$

Θ. ισοσυμπλ.

$$\Longrightarrow \lim_{x \to 1^+} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\log x}{x-1} = 1$$

Ορισμός

Η f είναι συνεχής στο $\xi \in D(f)$ αν $\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$
$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, τω $\forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap D(f)$ να ισχύει
$|f(x) - f(\xi)| < \xi$



Θεώρημα

Έστω ξ απομονωμένο σημείο του $D(f)$, τότε η f είναι συνεχής στο ξ

Απόδειξη

$\exists\, \delta > 0$, τω $(\xi - \delta, \xi + \delta) \cap D(f) = \{\xi\}$. Έστω $\varepsilon > 0$,
$\exists\, \delta' \; (\delta' = \delta)$, τω $\forall x \in (\xi - \delta', \xi + \delta') \cap D(f)$
$$\underbrace{|f(x) - f(\xi)|}_{=0} < \varepsilon$$

• Αν $\xi \in D(f) \cap D(f)'$, τότε f είναι συνεχής στο ξ
αν $\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi) \iff \forall \{a_n\} \subseteq D(f)$, τω. $a_n \to \xi$,
$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(\xi)$

→ Ακολουθιακός ορισμός της συνέχειας ισχύει κι αν ξ μεμονωμένο

Η f είναι συνεχής από τα δεξιά (αντ. αριστερά) στο $\xi \in D(f)$ αν $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, \delta>0$ τω. $\forall x \in (\xi, \xi+\delta)$ (αντ. $(\xi-\delta, \xi)$) $\cap D(f)$ να ισχύει $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$

• Η f είναι συνεχής στο ξ ανν είναι αριστερά συνεχής κ' δεξιά συνεχής στο ξ

• Αν, επιπλέον, ξ σ.σ. από δεξιά (αντ. αριστερά), τότε f συνεχής από δεξιά (αριστερά) $\Leftrightarrow$ $\forall \{a_n\} \subseteq D(f)$ τω. $a_n \to \xi$ κ' $a_n \geq \xi$ (αντ. $a_n \leq \xi$), $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \to f(\xi)$.

Η f λέγεται συνεχής (αντ. από δεξιά ή από αριστερά) αν η f είναι συνεχής (δεξιά ή αριστερά) στο ξ, $\forall \xi \in D(f)$.

__Θεώρημα__

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $\xi \in A$ κ' f συνεχής στο ξ. Έστω $B \subseteq A$, τω $\xi \in B$. Τότε η $f/_B$ (περιορισμένη στο B) είναι συνεχής στο ξ. Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στο A, τότε f/B είναι συνεχής στο B

__Απόδειξη__

Έστω $\varepsilon>0$, f συνεχής στο $\xi \Rightarrow \exists\, \delta>0$, τω.
$\forall x \in (\xi-\delta, \xi+\delta) \cap A$, $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$
$\Rightarrow \exists\, \delta>0$, τω. $\forall x \in (\xi-\delta, \xi+\delta) \cap B = D(f/_B)$, $|\underbrace{f(x)}_{f/_B(x)} - \underbrace{f(\xi)}_{f/_B(\xi)}|$
$< \varepsilon \Rightarrow f/B$ συνεχής

Δεν το κάναμε

__Παράδειγμα__

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x)=x^2$, τω. $f(x)=x^2$, $f(x)=1$, $f(x)$ ημχ